Méthode : résolution d'un système différentiel

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche à résoudre le système différentiel

$$(S) \colon X' = AX.$$

Méthode :

1. On réduit la matrice A (si nécessaire sur $\mathbb{C}$ si les valeurs propres ne sont pas réelles). On détermine ainsi $P \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale ou triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$.

2. On remplace dans le système (refaire ce calcul à chaque fois) :

$$\begin{aligned} X' = AX \quad &\iff \quad X' = PTP^{-1}X \\ &\iff \quad P^{-1}X' = TP^{-1}X \\ &\iff \quad Y' = TY, \end{aligned}$$

   où $Y = P^{-1}X$.

3. On résout le système différentiel $Y' = TY$ d'inconnue Y (il s'agit d'équations différentielles linéaires d'ordre 1).

4. On revient aux solutions de (S) en écrivant $X = PY$.

5. Si on a les solutions complexes alors que l'on veut les solutions réelles, on remplace les éléments conjugués d'une base de solutions par leurs parties réelle et imaginaire.

Remarque. Cette méthode ne nécessite pas de calculer P^{-1}.

Exemple 1. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$.

Ce système équivaut à $(S) \colon X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. En réduisant la matrice A, on obtient

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. En posant $Y = P^{-1}X$, il vient que Y est solution du système différentiel

$$Y' = DY \quad \iff \quad \begin{cases} u' = 2u \\ v' = 3v \end{cases} \quad \text{où on a posé } Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

3. Il s'agit alors de deux équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1. On a donc $u(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{2t}$ et $v(t) = \mu\,\mathrm{e}^{3t}$ avec λ, $\mu \in \mathbb{R}$, *i.e.* $Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda\,\mathrm{e}^{2t} \\ \mu\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$.

4. En revenant à X via $X = PY$, on obtient les solutions de (S) :

$$X(t) = \begin{pmatrix} \lambda\,\mathrm{e}^{2t} + 2\mu\,\mathrm{e}^{3t} \\ \lambda\,\mathrm{e}^{2t} + \mu\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

qui, par définition de X, peut aussi s'écrire

$$\begin{cases} x(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{2t} + 2\mu\,\mathrm{e}^{3t} \\ y(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{2t} + \mu\,\mathrm{e}^{3t} \end{cases} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 10x - y \end{cases}$.

Ce système équivaut à (S): $X' = BX$ avec $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. En réduisant la matrice B sur $\mathbb{C}$, on trouve

$$B = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 1+4\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-4\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

2. En posant $Y = P^{-1}X$, il vient que Y est solution du système différentiel

$$Y' = DY \iff \begin{cases} u' = (1+4\mathrm{i})u \\ v' = (1-4\mathrm{i})v \end{cases} \quad \text{où on a posé } Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

3. Il s'agit alors d'équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1. On a donc $u(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{(1+4\mathrm{i})t}$ et $v(t) = \mu\,\mathrm{e}^{(1-4\mathrm{i})t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, *i.e.* $Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda\,\mathrm{e}^{(1+4\mathrm{i})t} \\ \mu\,\mathrm{e}^{(1-4\mathrm{i})t} \end{pmatrix}$.

4. En revenant à X via $X = PY$, on obtient les solutions complexes de (S) :

$$X(t) = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+4\mathrm{i})t} \\ (1-2\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{(1+4\mathrm{i})t} \end{pmatrix}}_{X_1(t)} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(1-4\mathrm{i})t} \\ (1+2\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{(1-4\mathrm{i})t} \end{pmatrix}}_{X_2(t)} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

5. Le couple (X_1, X_2) est une base des solutions complexes de (S). Comme X_1 et X_2 sont conjuguées, pour déterminer une base des solutions réelles, il suffit de les remplacer par leurs parties réelle et imaginaire, *i.e.* comme

$$X_1(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(4t) \\ \cos(4t) + 2\sin(4t) \end{pmatrix} + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \sin(4t) \\ \sin(4t) - 2\cos(4t) \end{pmatrix}$$

et $X_2(t) = \overline{X_1(t)}$, une base des solutions réelles de (S) est (X_3, X_4) où

$$X_3(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(4t) \\ \cos(4t) + 2\sin(4t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_4(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \sin(4t) \\ \sin(4t) - 2\cos(4t) \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, les solutions réelles de (S) sont

$$\begin{aligned} X(t) &= \alpha X_3(t) + \beta X_4(t) \\ &= \alpha\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(4t) \\ \cos(4t) + 2\sin(4t) \end{pmatrix} + \beta\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \sin(4t) \\ \sin(4t) - 2\cos(4t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ce qui peut aussi s'écrire

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^t\big(\alpha\cos(4t) + \beta\sin(4t)\big) \\ y(t) = \mathrm{e}^t\Big(\alpha\big[\cos(2t) + 2\sin(4t)\big] + \beta\big[\sin(2t) - 2\cos(4t)\big]\Big) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases} \iff X' = CX \quad \text{avec} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

1. La matrice C n'est pas diagonalisable mais elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Grâce à une indication fournie dans l'énoncé, on montre que

$$C = PTP^{-1} \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. En posant $Y = P^{-1}X$, il vient que Y est solution du système différentiel

$$Y' = TY \iff \begin{cases} u' = 2u + v \\ v' = 2v \end{cases} \quad \text{où on a posé } Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

3. Avec la seconde équation, on a directement $v(t) = \mu\,\mathrm{e}^{2t}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.
Alors u est solution de l'équation différentielle linéaire $u' - 2u = \mu\,\mathrm{e}^{2t}$ qui comporte un second membre. On résout l'équation homogène associée puis on détermine une solution particulière via la méthode de variations de la constante. On obtient ainsi $u(t) = (\lambda + \mu t)\,\mathrm{e}^{2t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Finalement $Y(t) = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu t)\,\mathrm{e}^{2t} \\ \mu\,\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$.

4. En revenant à X via $X = PY$, on obtient les solutions de (S) :

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2(\lambda + \mu t)\,\mathrm{e}^{2t} + \mu\,\mathrm{e}^{2t} \\ 2(\lambda + \mu t)\,\mathrm{e}^{2t} - \mu\,\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \big[2\lambda + \mu(2t+1)\big]\,\mathrm{e}^{2t} \\ \big[2\lambda + \mu(2t-1)\big]\,\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix},$$

avec λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $\begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{2t} \\ 2\,\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} (2t+1)\,\mathrm{e}^{2t} \\ (2t-1)\,\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$ forment une base de solutions de (S).
On peut aussi écrire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t) = 2\lambda\,\mathrm{e}^{2t} + \mu(2t+1)\,\mathrm{e}^{2t} \\ y(t) = 2\lambda\,\mathrm{e}^{2t} + \mu(2t-1)\,\mathrm{e}^{2t} \end{cases} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$